代数幾何学シンポジウム記録
2002年度 pp.117-126

井上曲面とツイスター空間

藤木 明
(大阪大学大学院理学研究科)

以下は Massimiliano Pontecorvo 氏 (Rome III) との共同研究の概説である.

目的は, 第 2 betti 数が正である井上曲面に対し, twistor 空間の手法を用いて, 反自己双対エルミート計量を構成することである. 本稿ではその証明の概略を述べる. 第 1 節で反自己双対計量と twistor 空間の定義を述べ, 第 2 節で主結果を述べる. 第 3 節で Donaldson-Friedman [3] の方法とその variation を説明する. これがわれわれの基本的方法である. 第 4 節では前節の方法で井上曲面が現れる状況を設定する. 最後に第 5 節で Joyce twistor 空間を用いて証明を完成する方法を略述する.

1 (反) 自己双対計量と twistor 空間

1.1. (反) 自己双対計量 (ASD; *anti-self-dual metric*)

M を向き付けられた 4 次元 C^∞ 多様体, g を M 上の Riemann 計量とする. このとき g の Riemann 曲率テンソル R は, 自然にふたつのテンソルの和

$$R = W + \rho$$

に分解する. ここで W は g の Weyl 共形曲率テンソルで ρ は g の Ricci テンソルのみから決まるテンソルである. 実はこのことは一般次元でも成立するが, 4 次元特有の現象として, W はさらにふたつの部分, 自己双対部分 W_+ と 反自己双対部分 W_-, に自然に分解する:

$$W = W_+ + W_-.$$

定義 (Atiyah-Hitchin-Singer [1]) $W_+ \equiv 0$ ($W_- \equiv 0$) のとき, リーマン計量 g は 反自己双対計量 [*anti-self-dual metric*] (自己双対計量[*self-dual metric*]) である, という. このとき (M, g) は 反自己 双対(自己双対)多様体とよばれる.

注意. 1) 一般に $W \equiv 0 \Leftrightarrow g$ が共形的に平坦[1]. である. したがって, 共形的に平坦なら自己双対かつ反自己双対である.

2) W および $W_\pm$ は g の共形類 $[g]$ のみに依存する[2]. したがって, (反) 自己双対性は実際は, g の共形類 $[g]$ に対する概念である.

---

[1]すなわち M の各点の近傍で適当な局所座標に関し g は局所的に Euclid 計量×正値関数の形に書ける.

[2]ここで共形類とは Riemann 計量に対する同値関係 $g \equiv g' \Leftrightarrow g = \varphi g'$, ($\varphi$ 正値 C^∞ 級関数) による同値類である.

3) M の向きを変えると $W_\pm$ は入れ替わる, したがって(反)自己双対性について考える場合, M の向きは重要である. 特に本稿では, M が複素曲面 S (から決まる C^∞ 多様体)である場合に S の自然な向きに関する反自己双対エルミート計量を考える.

1.2. twistor 空間

さて, ここでは計量を直接扱うわけではなく, これを twistor 空間という複素幾何学的対象を経由して研究する. すなわち次が知られている.

定理 (Penrose 対応) (cf. [1]) $(M,[g])$ を反自己双対多様体とする. このとき twistor 空間とよばれる 3 次元の複素多様体 Z が存在し次の性質をもつ.

1) Z は M 上の C^∞ fiber 束 $t: Z \to M$ の構造(twistor fibration) をもち, 各 fiber $L_x := t^{-1}(x), x \in M$, は, 複素射影直線 $\boldsymbol{P}^1$ と同型な Z の複素部分多様体である. さらにその法束 $N_{L_x/Z}$ は $O(1) \oplus O(1)$ と同型. (各 L_x は twistor line とよばれる.)

2) Z 上固定点を持たない, 反正則(anti-holomorphic) な対合的自己同型 $\sigma: Z \to Z, \sigma^2 = id_Z$, が存在し, t の各fiber を保存する; $\sigma(L_x) = L_x, x \in M$. ($\sigma$ は Z の実構造とよばれる.)

逆に, 上の性質を持つ対 $(t: Z \to M, \sigma)$ があたえられたとき, M 上に反自己双対な共形類 $[g]$ が標準的に定まる.

例. 1. M が 4 次元球面 S^4 で, 計量が標準計量 $g = g_{std}$ とする. この場合 g は共形的に平坦であり, したがって特に反自己双対である. S^4 を4元数射影直線 $\boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{H}) = \boldsymbol{H} \cup \{\infty\}$ と同一視するとき, twistor fibration は

$$t: \boldsymbol{P}^3 = (\boldsymbol{C}^4 - \{0\})/\boldsymbol{C}^* = (\boldsymbol{H}^2 - \{0\})/\boldsymbol{C}^* \to (\boldsymbol{H}^2 - \{0\})/\boldsymbol{H}^* =: \boldsymbol{P}^1(\boldsymbol{H})$$

によりあたえられる. ($\boldsymbol{H} = \{$ 4元数$\}, \boldsymbol{H}^* = \boldsymbol{H} - \{0\}$ である.)

2. $S^4 = \boldsymbol{R}^4 \cup \{\infty\}$ とみるとき, $\boldsymbol{R}^4$ 上ではg はユークリッド計量 g_{eucl} と共形的で, 誘導写像 $t: \boldsymbol{P}^3 - L_\infty \to \boldsymbol{R}^4$ が, $(\boldsymbol{R}^4, g_{eucl})$ のtwistor fibration となる. $\boldsymbol{P}^3 - L_\infty$ は $\boldsymbol{P}^1$ 上の ベクトル束 $O(1) \oplus O(1)$ の全空間と同一視される.

3. $S^4 - \{0, \infty\} = \boldsymbol{R}^4 - \{0\}$ では, 計量はさらに g_{eucl}/ρ^2, ρ は原点 0 からの距離, と共形同値で, この計量は Hopf 曲面 $(\boldsymbol{R}^4 - \{0\})/ < r > \cong S^1 \times S^3$ $(r > 1)$ 上に descend し, その上の共形的に平坦な計量をあたえる. 2, 3 は, 適当な複素構造に関し, 反自己双対エルミート計量と考えられる.

2 主結果

2.1. 井上曲面

まず井上曲面を復習する. 第1 betti 数 $b_1(S)$ が 1 のコンパクト複素解析曲面を VII 型曲面という. VII 型曲面はしたがって非 Kähler である.

例 イ. もっとも典型的なVII 型曲面は, $1 < |\alpha|, |\beta|$ をみたす任意の複素数 $\alpha, \beta \in \boldsymbol{C}$ に対し定まる次の(主)Hopf 曲面 $S_{\alpha,\beta}$ である.

$$S = S_{\alpha,\beta} := (\boldsymbol{C}^2 - \{0\})/\langle g \rangle, \quad g: (z,w) \to (\alpha z, \beta w), \quad (z,w) \in \boldsymbol{C}^2 - \{0\}.$$

S は $S^1 \times S^3$ と微分同相で, したがって第2 betti 数 $b_2(S) = 0$ である.

ロ. Hopf 曲面上の有限個の点を blow-up して得られる曲面 S を blown-up Hopf 曲面とよぶ. このとき $b_2(S) > 0$ であるが, もちろん S は極小ではない.

ハ. $b_2(S) > 0$ で極小なものの最初の例は, 次の3系列の井上曲面である (井上('74)).

a. 放物型井上曲面, b. 双曲型井上曲面, c. 半(双曲型) 井上曲面

これらの曲面は, その上に存在する曲線により特徴付けられることが知られている. これを次に述べる.

定理 (中村[14]) S を極小な VII 型曲面とする. このとき次が成立する.

a. S が放物型 $\Leftrightarrow$ S 上に非特異楕円曲線 $E = E_\omega$ と非特異有理曲線のサイクルが(ひとつづつ) 存在する.

b. S が双曲型 $\Leftrightarrow$ S 上に非特異有理曲線のサイクルがふたつ存在する.

c. S が半双曲型 $\Leftrightarrow$ S 上にひとつの非特異有理曲線のサイクルが存在し, その既約成分の個数は S の第2 betti 数に一致する.

ただし, 非特異有理曲線のサイクルとは, (通常通り) 既約成分 $C_i, 1 \le i \le k$, をもつ曲線 $C = C_1 \cup \ldots \cup C_k$ で, $C_i \cong \boldsymbol{P}^1$ (複素射影直線), かつ C_i と C_{i+1} $(1 \le i \le k, C_{k+1} := C_1)$ は一点で横断的に交わり, $C_i \cap C_j = \emptyset, |i-j| \ge 2$, となるものをいう. ただし $k = 1$ のときは, 通常2重点を1個もつ有理曲線を意味するものとする. $a_i = C_i^2$ (自己交点数) とおくとき, 重み列 $a(C) = (a_1, \ldots, a_k)$ はサイクルの不変量である.

a の場合曲面は E の周期 ω, $\mathrm{Im}\,\omega > 0$, に対応する連続パラメータ ω をもつが $(S = S_\omega)$, b, c の場合はパラメータは離散的である. したがって, 後者の場合, 井上曲面としての変形は rigid である. 放物型の場合は, $a_i = -2$ $(\forall i)$ となり, k が唯一の離散不変量となる. (半) 双曲型の場合は, サイクルのなす重み列が離散パラメータとなる. これらの重み列の特徴づけも中村によりあたえられている.

2.2. さてわれわれの主定理は次のように述べられる.

主定理.

1) すべての双曲型および半双曲型井上曲面上に, 反自己双対的(anti-self-dual な) エルミート計量(の連続族) が存在する.

2) $\mathrm{Im}\,\omega$ が十分大である“実” 放物型井上曲面 S_ω 上に, 反自己双対的なエルミート計量が存在する.

$\mathrm{Im}\,\omega$ が十分大であるとは, E_ω が通常2重点を1個もつ有理曲線の微小変形として得られているということを意味する. “実” の意味の説明はここでは省略する. われわれの方法では, $\mathrm{Im}\,\omega$ が十分大というだけでは不十分で, 周期にある real constraint が生じ, 結局実1次元分の ω に対してのみ S_ω に反自己双対計量が存在が示せている, という意味である. その実周期はいまのところ同定できていないが, 「ω が純虚数」というのはひとつの確からしい解答である.

2.3. これまでの結果

まず VII 型曲面を考える背景についてひとこと述べる. (S,h) をコンパクト反自己双対エルミート曲面とする. このとき当然次の二つの場合が考えられる.

Case A. h はある Kähler 計量 k と共形的に同値.

Case B. h はどのような Kähler 計量とも共形的に同値でない.

一般に Kähler 計量 k に対しては

反自己双対 $\Leftrightarrow$ スカラー曲率 $\equiv 0$

が知られている. したがって次の関係が存在する:

Calabi-Yau (Ricci-平坦) Kähler 計量 $\Rightarrow$ 反自己双対 Kähler 計量

$\Rightarrow$ Calabi の extremal Kähler 計量.

したがって特に Case A の研究の重要性は明白である.

一方, ここで興味のある Case B の場合には, 反自己双対計量の意味はいまのところそれほど明白ではなく, その意味づけは今後に待たなければならない. いずれにせよ Case B の場合, 曲面 S は非Kähler でその多重種数はすべて 0 になる. したがって特に S は VII 型曲面となる (Boyer [2]). これがVII 型曲面を考える理由である.

さてVII 型曲面上の反自己双対エルミート計量の存在については, これまでほとんど何も知られていない.

イ. $b_2(S)=0$ の場合:

Hopf 曲面 $S=S_{\alpha,\beta}$ において, $|\alpha|=|\beta|$ とする. このとき, $\boldsymbol{C}^2-\{0\}$ 上のエルミート計量

$$\tilde{h} := (dz\cdot d\bar{z} + dw\cdot d\bar{w})/(|z|^2+|w|^2), \tag{1}$$

は, S 上の計量 h を誘導する. これはあきらかに共形的に平坦であり, したがって反自己双対的である. 逆に, $b_2(S)=0$ の VII 型曲面 S 上に反自己双対計量が存在すれば, $S\cong S_{\alpha,\beta}, |\alpha|=|\beta|$, であり, 計量は上の h と共形的に同値であることが知られている (Pontecorvo). ここでは条件 $|\alpha|=|\beta|$ が reality constraint と考えられることに注意する.

ロ. $b_2(S)>0$ の場合に知られている唯一の例は LeBrun [10] による例である. これは, いわゆる Hyperbolic Ansatz を用いて計量を具体的に構成する明示的な結果である. 対応する曲面 S は blown-up Hopf 曲面, あるいはより具体的には S は Hopf 曲面 $S_r:=S_{r,r}, r>0$, 上, 非特異楕円曲線 $E=\{z=0\}/\langle h\rangle$ 上の有限個の点を blow-up して得られる曲面である. LeBrun の方法は放物型井上曲面 S_ω (ω 純虚数) に対しても一般化できることが, 彼自身により指摘されている.

3 Donaldson-Friedman の方法

以後多様体はすべてコンパクト性を仮定する.

3.1. Donaldson-Friedman [3] は, ふたつの反自己双対多様体 $(M_i,[g_i]), i=1,2,$ があたえられたとき, M_i の連結和 $M_1\#M_2$ 上に反自己双対構造 $[g]$ を構成する方法を発見した[3].

[3] M_i から 1 点 x_i と x_i を中心とする (小さな) 4次元開球 B_i をとる. M_1-B_1 と M_2-B_2 においてそ

計量(共形類)が, 共形的に平坦である場合には, このような理論は古典的である. この方法をtwistor空間の言葉で解釈し, 後者を一般の反自己双対計量の場合に一般化したのがこのD-Fの方法と言える.

$Z_i, i=1,2,$ を $(M_i,[g_i])$ のtwistor空間とする. 点 $x_i \in M_i$ をとり, 対応するtwistor line $L_i := L_{x_i}$ を中心として Z_i をblowing-upする: $\mu_i : \tilde{Z}_i \to Z_i$. 例外集合 $Q_i := \mu^{-1}(L_i) \subseteq \tilde{Z}_i$ は, 関係 $N_{L_i/Z_i} \cong O(1) \oplus O(1)$ により $\boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ と同型で, $\mu_i|Q_i : Q_i \to L_i$ は第一射影 $p_1 : \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1 \to \boldsymbol{P}^1$ と同一視される. Z_i の実構造 σ_i は $\tilde{Z}_i$ にliftするがこれをやはり σ_i で表す. いま (σ_1,σ_2)-同変な同型 $\varphi : Q_1 \to Q_2$ で両者の第一成分と第二成分を入れ替えるものをひとつ固定する. さらに Z_i の部分空間である Q_i どうしを φ により同一視して, 新たな空間 $\hat{Z} := Z_1 \cup_\varphi Z_2$ をつくる. $\hat{Z}$ は $Q_1 \cong Q_2$ と同型な部分空間 Q にそって正規交叉を持つコンパクト複素空間である.

いま $\hat{Z}$ の倉西族(semiuniversal deformation) $\{f : \mathcal{Z} \to T, o \in T, Z_o \cong \hat{Z}\}$ を考える. (したがって特に $\mathcal{Z}, T$ は複素空間, f は固有平坦な正則写像で, T はその一点(基点) o におけるgermと同一視される. また $Z_o = f^{-1}(o)$ である.) すると[3]の主結果は次のように述べられる.

定理(Donaldson-Friedman). $H^2(Z_i,\Theta_i)=0, i=1,2,$ とする. (ただし Θ_i は Z_i 上の正則ベクトル場の層.) このとき T は非特異で, T の一般点 t に対し, f のfiber $Z_t := f^{-1}(t)$ は非特異である. さらに t を実点にとると, Z_t は $M_1 \# M_2$ 上のある反自己双対計量に同伴なtwistor空間である.

注意. '実点'の意味を正確に述べるには, もう少し定式化を複雑にしなければならないのでここでは省略する. Z_i 上の実構造 σ_i は $\hat{Z}$ の実構造 $\hat{\sigma}_i$ を誘導するが, 倉西族がuniversalであるならば, これはさらに T の実構造を誘導し, その固定点が T の実点である. しかし興味のある多くの場合, $\hat{Z}$ は非自明な連続自己同型群を許し, したがって f はuniversalではない.

3.2. 計量のエルミート性条件

しかしながら, この構成のままでは, できた反自己双対計量および対応するtwistor空間の性質がよくわからない. この点を補うためにDFの方法のいろいろなvariationが考えられた. われわれの場合に必要なvariationを説明するために, 反自己双対計量がエルミート計量となるためのtwistor空間に対する条件をまず説明する.

$(M,[g])$ を反自己双対多様体, Z を対応するtwistor空間とする. S を Z 内の(複素)曲面とする. 一般に交点数 $L_x \cdot S > 0$ であるが, $L_x \cdot S = 1$ となるとき S はelementaryである, という. このとき $\bar{S} := \sigma(S)$ もelementaryな複素曲面である. このとき次のことが知られている.

命題 (Poon [15]) Elementaryな曲面 S は非特異で, それが一般にtwistor line L を含むかそうでないかによってふたつの型に分かれる.

の境界 $bB_i \cong S^3$ を適当な微分同相写像 $u : bB_1 \to bB_2$ で同一視して得られる多様体が連結和 $M_1 \# M_2$ である. これは点 x_i, 開球 B_i, 写像 u のとり方によらない.

Type 1: $\exists L \subseteq S$. このとき S に含まれる twistor line L は一意的で, その S 内での自己交点数 $L^2 = 1$ である. (したがって, S は複素射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ の blown-up である有理曲面であり L は line の proper transform となる.) また $S \cap \bar{S} = L$ で, 交わりは transversal である.

Type 2: $\forall L \not\subseteq S$. このとき $t|S$ は向きを保つ微分同相写像 $S \to M$ をあたえ $(t|S)^* g$ は S ($\cong M$) 上の反自己双対エルミート計量になる.

逆に, M 上の(ある複素構造に対応する) 反自己双対エルミート計量は, (自然に定まる) ある elementary 曲面 S から上のようにして得られる.

したがって, Type 2 がわれわれに興味のある場合といえるが, 実際は Type 1 も重要になる. すなわち, ここでは D-F の改良版を工夫することにより, Type 1 のelementary 曲面を含むtwistor 空間から Type 2 の elementary 曲面を含むtwistor 空間を構成する方法を考える. 以下の方法は [8] の方法の variation である.

3.3. Variation of Donaldson-Friedman:

ひとつのポイントは, ふたつの多様体の連結和を考える代わりに, ひとつの多様体の自己連結和を考える点である. (M から 2 点 $x_i, i = 1, 2$, と x_i を中心とする(小さな) 4 次元開球 B_i をとる. $M - B_1 - B_2$ においてその 境界 $bB_i \cong S^3$ を適当な微分同相写像 $bB_1 \to bB_2$ で同一視して得られる多様体を M の 自己連結和という.)

$(M, [g])$ を反自己双対多様体とし, Z を対応する twistor 空間とする. Z は Type 1 の elementary 曲面 S を含むとする. $L_1 = S \cap \bar{S}$ とおくと上の命題により, L_1 は twistor line である. L_1 以外の任意の twistor line を L_2 とすると, 再び上の命題から L_2 は S (resp. $\bar{S}$) と一点 p (resp. $\bar{p}$) でtransversal に交わることがわかる. Z をdisjoint union $L_1 \cup L_2$ で blowing-up する: $\mu : \tilde{Z} \to Z$. 前と同様 $Q_i := \mu^{-1}(L_i) \cong \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ であるから, 第1, 第2 因子を入れ替える σ-不変同型 $\varphi : Q_1 \to Q_2$ を固定し, これにより Q_1 と Q_2 を同一視する. 生じた複素空間を $\hat{Z}$ と書く. $\hat{Z}$ は Q_i と同型な複素曲面 Q に沿って正規交叉をもつ.

S および $\bar{S}$ の $\tilde{Z}$ における proper transform を $\tilde{S}$ および $\tilde{\bar{S}}$ とする. $L_1 = S \cap \bar{S}$ が blowing-up の中心だから$\tilde{S}$ と $\tilde{\bar{S}}$ は交わらない. したがって, それらの $\hat{Z}$ における像 $\hat{S}$ と $\hat{\bar{S}}$ も共通点をもたない. なお σ は $\hat{Z}$ の実構造 $\hat{\sigma}$ を誘導するが, このとき $\hat{\bar{S}} = \sigma(\hat{S})$ である.

さてここで φ にさらに条件を加える. 自然写像 $\mu_S : \tilde{S} \to S$ は点 p での blowing-up にほかならない. $E = \mu_S^{-1}(p)$ とおくと$E = \tilde{S} \cap Q_2$ であり, E は $Q_2 \cong \boldsymbol{P}^1 \times \boldsymbol{P}^1$ の第1射影のひとつの fiber である. 一方 $\tilde{L} := \tilde{S} \cap Q_1$ は, μ_S によって L_1 に同型に移されるので, 第2射影のfiber のひとつである. $\bar{E} := \sigma(E) = \tilde{\bar{S}} \cap Q_2, \bar{\tilde{L}} =: \sigma(\tilde{L}) = \tilde{\bar{S}} \cap Q_1$ についても事情は同じである. したがって, φ に対し $\varphi(L) = E$, $\varphi(\bar{L}) = \bar{E}$ をみたす, という条件を付加することができる. (すなわちそのような φ は存在する.)

さてその上で, こんどは複素空間の対 $(\hat{Z}, \hat{S} \coprod \hat{\bar{S}})$ に対する倉西族

$$\{f : (\mathcal{Z}, \mathcal{S} \coprod \bar{\mathcal{S}}) \to T, o \in T, (Z_o, S_o \coprod \bar{S}_o) \cong (\hat{Z}, \hat{S} \coprod \hat{\bar{S}})\}$$

を考える. ここで, $\mathcal{Z} \to T$, $\mathcal{S} \coprod \bar{\mathcal{S}}) \to T$ はおのおの固有平坦正則写像で, $Z_o, S_o, \bar{S}_o$ は o 上の fiber である. D-F の類似として次をうる.

定理 1. $H^2(Z, \Theta(-\log(S \cup \bar{S})) = 0$ とする. (ただし $\Theta(-\log(S \cup \bar{S}))$ は, Z 上の正則ベクトル場で S および $\bar{S}$ に接するもののなす層. 交わり $S \cap \bar{S}$ が transversal なので, $\Theta(-\log(S \cup \bar{S}))$ は locally free である.) このとき T は非特異で, T の一般点 t では fiber $Z_t, S_t, \bar{S}_t$ はすべて 非特異. さらに, t が“実点”なら Z_t は M の自己連結和上の, ある反自己双対計量 g に同伴な twistor 空間であり, S_t は Z_t の Type 1 の elementary 曲面となる. したがって, 特に Z_t は S_t のある反自己双対エルミート計量に同伴な twistor 空間となる. S_t は VII 型曲面である.

例. $M = S^4, Z = \boldsymbol{P}^3$ の場合 (1.2 の例参照). S として L_∞ を含む $\boldsymbol{P}^2$ をとると$\tilde{S}$ は次数 1 の Hirzebruch 曲面 Σ_1 となり, φ を適当に取ると, 上記の smoothing $\hat{S} \to S_t$ において S_t は Hopf surface S_τ と同型となる, したがって Z_t はHopf 曲面 S_τ のtwistor 空間となる.

4 井上曲面をうる方法

定理 1 でえられる VII 型曲面 S_t が §2 に述べた井上曲面となる場合を考えたい. 3.3 の記号で, $\tilde{S}$ 内の曲線 $\tilde{L}$ および E はそれぞれ自己交点数 $+1$ および -1 を持つ. よって $\hat{S}$ は有理曲面 $\tilde{S}$ 内の disjoint な(+1)-曲線と (−1)-曲線を同一視して得られており, さらに S_t は $\hat{S}$ の smoothing としてえられている. 前例での変形 $\Sigma_1 \to S_\tau$ は小平 [9] による有名な例であるが, このような方法で, 有理曲面から VII 型曲面をうる一般論が中村 [11], [13] により展開されている. すなわち, 一般に有理曲面 S が互いに交わらない非特異有理曲線 C_+, C_-, $C_+^2 = +1, C_-^2 = -1$, を含むとき, *admissible* ということにすると, $\tilde{S}$ において C_+ と C_- をある同型 $\psi : C_+ \to C_-$ で同一視してえられる, double curve C ($\cong C_+ \cong C_-$) をもつ非正規有理曲面 $\hat{S}$ から, 変形で global spherical shell を持つ VII-型曲面がえられ, またその逆も成立する, という結果である. 特に toric な有理曲面から井上曲面を toric な退化を使って構成する方法も中村によってえられている [12]. ここではしかし twistor 空間との関連を念頭において, 以下のような定式化を用いる.

S を toric な非特異有理曲面とする. したがって S は effective な代数的 $\boldsymbol{C}^{*2}$-作用をゆるす. その開軌道を U とするとその補集合 $C := S - U$ は非特異有理曲線のサイクルをなす. これを $C = C_1 \cup \ldots \cup C_k, C_i \cong \boldsymbol{P}^1$, と書き$C$ の既約成分の交点を $p_i = C_i \cap C_{i+1}, 1 \leq i \leq k-1, C_k \cap C_1 = p_k$ とする. 次を仮定する.

(A) C_i の中に $C_i^2 = 1$ となるものが存在する

このとき必要なら番号を付け替えて $C_1^2 = 1$ としてよい. 点 p_j ($j \neq 1, k$) における S の blowing-up を $\nu : \tilde{S} \to S$ とし, $E = \nu^{-1}(p_j)$ を例外 (−1)-曲線とする. すると $\tilde{S}$ はふたたび toric 曲面で, しかも明らかに上の意味で admissible である. C_i の $\tilde{S}$ における proper transform を $\tilde{C}_i$ であらわす. いま同型 $\psi{:}\tilde{C}_1 \to E$ で

a) $\psi(p_1) = p_{j-1}$, $\psi(p_k) = p_j$ または b) $\psi(p_1) = p_j$, $\psi(p_k) = p_{j-1}$

を満たすものをとる. ψ により C_1 と E を同一視し, $\tilde{S}$ から非正規曲面 $\hat{S} := S/\psi$ をうる. $\tilde{C}_i$ の $\hat{S}$ における像を $\hat{C}_i$ であらわすと, $\hat{S}$ はふたつの互いに交わらない非特異有理曲線の

サイクル$\hat{C}_2 \cup \ldots \cup \hat{C}_{j-1}$ および $\hat{C}_{j+1} \cup \ldots \cup \hat{C}_{k-1}$ を含む．これらの和集合を $\hat{C}$ で表す．$\hat{C}$ は $\hat{S}$ 内の Cartier 因子である．このとき次が成立する．

命題 2. 複素曲面 $\hat{S}$ とその上の 曲線 $\hat{C}$ の対 $(\hat{S}, \hat{C})$ の倉西族 $(h : (\mathcal{S}, \mathcal{C}) \to T,\ o \in T,\ (S_o, C_o) = (\hat{S}, \hat{C}))$ を考えるとき次が成立する．
1) $\dim T = 1$ かつ T は非特異．
2) $t \neq o$ なら $\hat{S}_t$ は非特異．
3) さらに次の条件を仮定する．
(B) $C_l^2 = -1$ なら $l = j$ または $j = \pm 1$.
このとき次が成立する．
(a) の場合
(1) $j = 2$ または $k - 1$ なら $S_t, t \neq o$, は 放物型井上曲面である．
(2) それ以外の場合は $S_t,\ t \neq o$, は双曲型井上曲面である．このとき $S_t,\ t \neq o$, はすべて同型．しかも任意の双曲型井上曲面はある toric 曲面から上の方法でえられる．
(b) の場合$S_t, t \neq o$, は半井上曲面．このとき $S_t, t \neq o$, はすべて同型．しかも任意の半井上曲面はある toric 曲面から上の方法でえられる．

注意．(B) が成立しない一般の場合, S_t は井上曲面において非特異有理曲線のサイクルの nodes を blowing-up してえられる極小でない曲面となる．

5 Joyce twistor 空間

命題2と定理1により，主定理を示すために残された仕事は，条件 (A) を満たす任意の toric 曲面 S に対し，S を Type 1 の elementary 曲面として含む twistor 空間 Z で，$H^2(Z, \Theta(-\log(S \cup \bar{S})) = 0$ を満たすものを見出すことに帰着される．実際このとき，定理の操作 $(Z, S) \to (\hat{Z}, \hat{S})$ において，$S \to \hat{S}$ は前節の操作そのものであり，また cohomology の消滅は，命題2の $\hat{S} \to S_t$ なるsmoothing が，包含関係 $\hat{S} \subseteq \hat{Z}$ に関して smoothing $\hat{Z} \to Z_t$ に拡張されることをも意味する．したがって，定理 1 から主定理がしたがう．

S を (A) を満たす toric 曲面とする．Z としては Joyce twistor 空間をとる．まずこれを説明する．$M = m\boldsymbol{P}^2 := \boldsymbol{P}^2 \# \ldots \# \boldsymbol{P}^2, m \geq 0$, を複素射影平面 $\boldsymbol{P}^2$ m 個の連結和とする．ただし，$0\boldsymbol{P}^2 = S^4$ とする．2次元torus $K := S^1 \times S^1$ をコンパクト Lie 群と考え，その M への smooth な作用を固定する．(m を固定するごとに，微分同相を除き有限個の可能性がある．) $m' = \max(m, 1)$ とおく．このとき次が成立する．

定理 (Joyce [7]) m'-次元連続実パラメータに依存する K-不変な自己双対構造 $[g] = [g]_s$ がM 上に存在する．

向きを変えた M を $\bar{M}$ であらわす．$[g]$ は $\bar{M}$ 上の反自己双対構造である．対応する twistor 空間 Z を一般に Joyce twistor 空間という．Z は誘導された $G := \boldsymbol{C}^{*2}$ の自然な双正則作用を持つ．Z の構造は [5] により詳しく調べられた．これから次の定理の 1) を導き出すことは難しくない．

定理 3. S を条件(A)を満たす toric 曲面とし $m = b_2(S) - 1$ とおく. このとき次が成立する.

1) $m\boldsymbol{P}^2$ への smooth な K-作用で, 対応する(任意の) Joyce twistor 空間 Z が S を Type 1 の elementary 曲面として含むものが一意的に存在しする.

2) $H^2(Z, \Theta(-\log(S \cup \bar{S})) = 0$.

消滅定理 2) は一般に Moishezon twistor 空間 Z とその elementary 曲面 S に対し成立する. 実際, 2) は同じ仮定の下で成立する [6] の消滅定理 $H^2(Z, \Theta(-(S + \bar{S})) = 0$ より容易にしたがう.

注意. 1) 以上の記述は実は少し簡略化されており, 厳密な扱いには, 本多[4]により考察された複素空間の三つ組 $(\hat{Z}, \hat{S} \coprod \hat{\bar{S}}, \hat{C} \coprod \hat{\bar{C}})$ の変形を考えることが必要である.

2) 上記の方法により井上曲面以外のさまざまな VII 型曲面の上にも, 反自己双対エルミート計量が存在することが示される.

3) Joyce twistor 空間は豊かな構造を持っており, このことから対応する井上曲面上の反自己双対計量の moduli 空間の記述など, 興味ある問題がいくつも生じてくる. たとえばわれわれの方法で構成した放物型井上曲面上の反自己双対計量は LeBrun によりまったく別の方法で構成されたもの(2.3, 2) 参照)と一致することがほぼ確からしい.

References

[1] M.F. Atiyah, N.J. Hitchin and I.M. Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. R. Soc. London A.*, **362** (1978),425–461.

[2] Boyer, C. P., Conformal duality and compact complex surfaces, *Math. Ann.*, **274**, 517–526 (1986)

[3] Donaldson, S., and Friedman, R., Connected sums of self-dual manifolds and deformations of singular spaces, *Nonlinearity* **2** (1989), 197–239.

[4] Honda, N., Donaldson-Friedman construction and deformations of a triple of compact complex spaces, *Osaka J. Math.* **36** (1999), 641–672.

[5] Fujiki, A., Compact self-dual manifolds with torus actions, *J. Differential Geom.*, **55** (2000), 229–324.

[6] Fujiki, A., Twistor spaces of algebraic dimension two associated to a connected sum of projective planes, submitted.

[7] Joyce, D., Explicit construction of self-dual 4-manifolds, *Duke J. Math.*, **77** (1995), 519–552.

[8] Kim, J. and Pontecorvo, M., Relative singular deformation with application to twistor theory, *J. Differential Geom.*, **41** (1995), 449–447.

[9] Kodaira, K., On the structure of compact complex analytic surfaces. III. *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 55–83.

[10] Le Brun, C., Anti-self-dual hermitian metrics on the blown-up Hopf surfaces, *Math. Ann.*, **289** (1991), 383–392.

[11] Nakamura, I. Rational degeneration of VII_0 surfaces. Preprint (1982).

[12] Nakamura, I. Toric degeneration of VII_0 surfaces. Preprint (1982).

[13] Nakamura, I., VII_0 surfaces and a duality of cusp singularities, In: Classification of algebraic and analytic manifolds, (Ed. K.Ueno), *Progress in Math.*, **39** (1983), 333-378.

[14] Nakamura, I., On surfaces of class VII_0 with curves. *Invent. math.*, **78**, (1984), 393-443.

[15] Poon, Y.S., On the algebraic structure of twistor spaces, *J. Differential Geom.*, **36** (1992), 451–491.